

Received:  
February 10, 2020

Accepted:  
April 24, 2020

Published:  
April 30, 2020

## Analysis of the Finite Differences Numerical Method and Method Analysis of Successive Integrations in the study of a simply supported beam subjected to distributed load

Daniel Tanure Franco Dutra<sup>1</sup> , Carlos Alberto Mirez Tarrillo<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, Brasil.

### Email address

danieltanure.111@hotmail.com (Daniel T.F. Dutra) – Corresponding author.

### Abstract

In the present article a study is presented between the methods: analytical and numerical (Finite Difference Method “MDF”). In the analysis, the elastic line and bending moment of a beam were studied in both methods. The simply supported beam submitted to a distributed loading represents one of the most important examples in engineering. Deformation analysis is an important procedure in Structural Engineering. Initially, the Differential Equation of a beam is presented, and we tried to find the analytical and numerical solutions. Subsequently, the results are presented using tables and graphs for both methods and it was concluded that the numerical method provides satisfactory results.

**Keywords:** Structures, Beam, Differential Equations, Numerical Methods.

## 1. Introdução

Diversos problemas na engenharia são modelados matematicamente através de uma equação diferencial “ED”. Porém, como nem todas as EDs têm uma solução analítica possível ou viável, os métodos numéricos surgem como uma ferramenta alternativa para sua solução.

A facilidade de utilização dos métodos numéricos e a qualidade dos seus resultados são fortes atrativos para o aumento no seu uso.

Franco (2011) diz que os métodos analíticos são a melhor forma de solucionar os problemas na engenharia, pois fornecem uma solução de forma fechada. As circunstâncias, entretanto, podem desfavorecer seu uso. Outra possibilidade seriam os experimentos laboratoriais; mas eles também podem ser limitados de forma incontornável. Já os métodos numéricos não apresentam restrições.

Ganhando espaço no meio acadêmico, os métodos numéricos estão cada vez mais demonstrando a sua confiabilidade quando comparados com os métodos analíticos, assim como demonstrado no presente trabalho.

### 1.1. Conceitos básicos

Segundo o item 14.4.1.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014) definem-se vigas como “elementos lineares em que a flexão é preponderante”. Um tipo de viga muito comum nos estudos da engenharia é a viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído. Os apoios dessa viga são articulados, possibilitando o giro livre na flexão. Um dos apoios, ainda, pode mover-se livremente sobre a superfície horizontal. O

carregamento distribuído normalmente se refere ao peso próprio que a viga tem de suportar. A Figura (1) a seguir nos dá uma representação genérica da viga em questão.

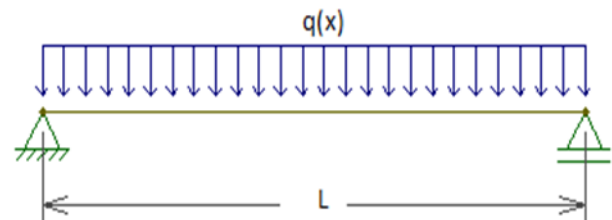


Figura 1 – Viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído.

Segundo Timoshenko (1967), ao se projetar uma viga, é necessário ao engenheiro atenção à deformação (deflexão) que as cargas atuantes produzem nessa viga. Deflexão pode ser definida como o deslocamento sofrido por qualquer ponto no eixo da viga. A deformação limite em projetos estruturais é, normalmente, definida como uma pequena parte do vão.

As forças transversais agem no plano de simetria ocasionando a flexão. Após a flexão, o eixo da viga sofre uma deformação, representada através de uma curva denominada “linha elástica” (Hibbeler, 2010) define linha elástica como “diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga”. Também surge um ângulo de inclinação, que representa a rotação da linha elástica em relação à linha horizontal.

A Figura (2), logo a seguir, traz uma ideia do comportamento do eixo de uma viga submetida a um carregamento distribuído.

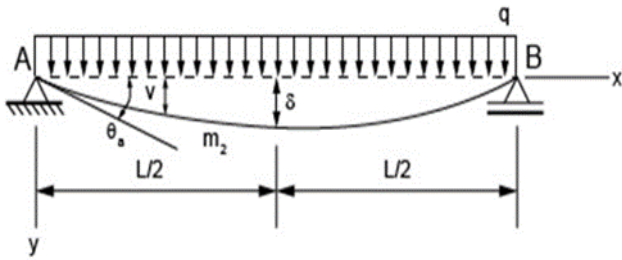


Figura 2 – Deflexão de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído.

Uma primeira opção são as chamadas teorias clássicas para a resolução dos problemas referentes à linha elástica, que consistem na obtenção de soluções mediante métodos analíticos. Os métodos analíticos nos fornecem soluções exatas ao problema, ou seja, deflexão em todos os pontos da estrutura. A limitação desse método é que sua utilização é condicionada à simplicidade do problema, tornando-se muito complicado, e às vezes impossível, o cálculo para determinadas situações. Uma alternativa, nesses casos, é a simplificação do problema; o que poderia diminuir bastante a confiabilidade do modelo.

Uma segunda opção possível é a utilização de métodos numéricos para a resolução do problema. Os métodos numéricos, apesar de consistirem de aproximações, podem nos entregar resultados bastante satisfatórios. Com a utilização de métodos numéricos, podemos realizar os cálculos apenas com operações aritméticas (FRANCO, 2006).

Analisamos o método das diferenças finitas (MDF), segundo Ruggiero Lopes (1996), é um método numérico que tem como ideia básica a transformação do problema de resolver uma equação diferencial em resolver um sistema de equações algébricas, aproximando as derivadas encontradas na equação por diferenças finitas.

No presente trabalho, foram analisados ambos métodos (analítico e numérico) para encontrar soluções para uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído.

## 2. Metodologia

O cálculo da linha elástica se baseia na equação da viga (Timoshenko, 1967). A saber:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q \quad (1)$$

onde  $v$  é a deflexão;  $q$  é o carregamento;  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $I$  é o momento de inércia.

A partir da Equação (1) chega-se nas seguintes equações:

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -V \quad (2)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M \quad (3)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \theta \quad (4)$$

As condições de contorno “CC” são as condições impostas à viga pelos seus apoios, e determinam as constantes de integração (Beer, 2011);

A figura (3) a seguir fornece uma representação gráfica das condições de contorno de alguns apoios possíveis de uma viga: apoio fixo, livre e simplesmente apoiada, respectivamente.

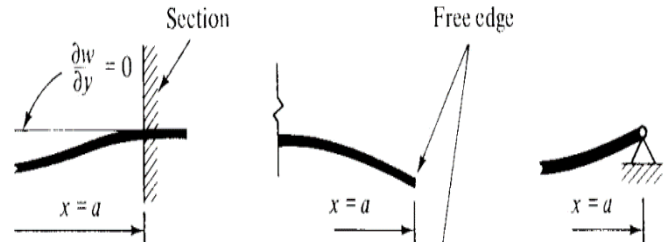


Figura 3 – Representação de apoios em vigas (adaptado de Szilard, 2004, p. 36).

Para a viga desde a Figura (1), e Figura (2), as CC são:

$$v(0) = 0 \quad (CC1)$$

$$v(L) = 0 \quad (CC2)$$

$$v''(0) = 0 \quad (CC3)$$

$$v''(L) = 0 \quad (CC4)$$

### 2.1. Método Analítico

Integrando sucessivamente a Equação (1), obtêm-se:

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = qx + c_1 \quad (5)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (6)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{qx^3}{6} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (7)$$

$$EIv = \frac{qx^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (8)$$

onde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  são constantes.

Aplicando as condições de contorno equações [CC1-CC4] nas equações [5-8], encontramos os valores de cada constante.

A equação (solução) analítica referente à linha elástica, é então:

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3 x) \quad (9)$$

A equação analítica que rege os momentos fletores, (desde a equação (3)), é:

$$M(x) = \frac{q}{2EI} (-x^2 + Lx) \quad (10)$$

## 2.2. Método Numérico

Aplicamos o Método das Diferenças Finitas “MDF” na viga simplesmente apoiada, onde discretiza-se a viga em uma malha, disposta em um conjunto finito de pontos, denominados “nós”. A Figura (4) a seguir representa uma malha de diferenças finitas.

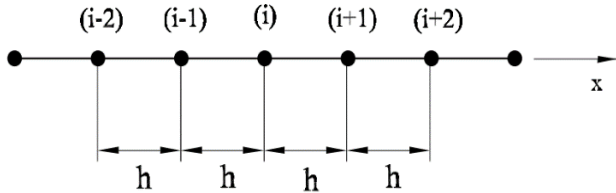


Figura 4 – Malha de diferenças finitas (Castro, 2011, p. 20).

No método das diferenças finitas, as derivadas que aparecem na definição das condições de contorno são aproximadas “por diferenças envolvendo o valor que a função incógnita toma num conjunto de pontos igualmente espaçados aos quais se dá usualmente o nome de *nós* da discretização” (Castro, 2001).

As equações utilizadas para o cálculo da deflexão em cada *nó* estão descritas a seguir.

$$v'(i) = \frac{dv(i)}{dx} = \frac{1}{2h}(v_{i+1} - v_{i-1}) \quad (11)$$

$$v''(i) = \frac{d^2v(i)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \quad (12)$$

$$v'''(i) = \frac{d^3v(i)}{dx^3} = \frac{1}{2h^3}(v_{i+2} - 2v_{i+1} + 2v_{i-1} + v_{i-2}) \quad (13)$$

$$v^{iv}(i) = \frac{d^4v(i)}{dx^4} = \frac{1}{h^4}(v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}) \quad (14)$$

Para um melhor estudo do MDF na análise da deflexão em vigas foi escolhida uma viga com *três nós internos* e outra com *cinco nós internos* (são necessários dois nós externos para aplicação das condições de contorno). Com isso é possível fazer a comparação dentro do próprio método numérico e também a verificação da quantidade de nós para efeitos de comparação com o resultado do método analítico.

Os cálculos foram feitos manualmente, demonstrando a possibilidade da utilização do MDF sem o auxílio de ferramentas computacionais.

Primeiro: Considere a análise para uma viga com  $L=1$  e com “*três nós*” (1, 2 e 3); então  $h=0,5$ , conforme a figura (5) a seguir.

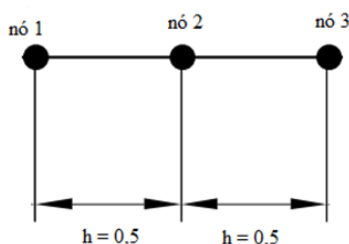


Figura 5 – Malha de diferenças finitas com  $L=1$  e três nós.

Aplicando às condições de contorno equações [CC1-CC4], e desde a equação (12), obtêm-se:

$$v_1 = 0 \quad (15)$$

$$v_0 = -v_2 = v_4 \quad (16)$$

$$v_3 = 0 \quad (17)$$

Inserindo a equação (14) na equação (1), tem-se:

$$\frac{1}{h^4}(6v_2) = \frac{q}{EI} \quad (18)$$

Pode-se encontrar o momento fletor no *nó* analisado desde a equação (3) através da equação (12), então:

$$\frac{1}{h^2}(-2v_2) = -\frac{M}{EI} \quad (19)$$

Segundo: Para uma viga com “*cinco nós internos*”, considerando  $L=1$ , tem-se  $h=0,25$ , conforme representado pela figura (6).

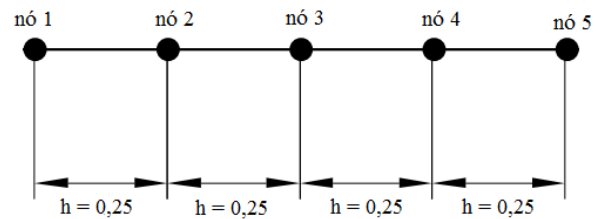


Figura 6 – Malha de diferenças finitas com  $L=1$  e cinco nós.

Aplicando as condições de contorno, deflexões e momentos fletores nulos *nos extremos* da viga, obtêm-se:

$$v_{(x=0)} = 0 \quad (20)$$

$$M_{(x=0)} = v''_{(x=0)} = 0 \quad (21)$$

$$v_{(x=L)} = 0 \quad (22)$$

$$M_{(x=L)} = v''_{(x=L)} = 0 \quad (23)$$

Sendo assim, pode-se encontrar duas deflexões nulas e duas relações entre as deflexões de outros nós, conforme a seguir:

$$v_1 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{h^2}(v_2 - 2v_1 + v_0) = 0 \quad (25)$$

$$v_0 = -v_2 \quad (26)$$

$$v_5 = 0 \quad (27)$$

$$\frac{1}{h^2}(v_6 - 2v_5 + v_4) = 0 \quad (28)$$

$$v_6 = -v_4 \quad (29)$$

O próximo passo consiste em representar as equações para os nós interiores em função apenas deles mesmos. Têm-se, então, três equações, representando os nós 2, 3 e 4, conforme representado a seguir:

$$\frac{1}{h^4}(v_4 - 4v_3 + 5v_2) = q \quad (30)$$

$$\frac{1}{h^4}(-4v_4 + 6v_3 - 4v_2) = q \quad (31)$$

$$\frac{1}{h^4}(5v_4 - 4v_3 + v_2) = q \quad (32)$$

Assim chega-se em um sistema linear, com três equações e três incógnitas, e que pode ser representado em formato matricial a seguir:

$$\frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Com relação aos momentos fletores, para uma viga com três nós, obtêm-se:

$$\frac{1}{h^2}(v_3 - 2v_2) = -\frac{M}{EI} \quad (33)$$

$$\frac{1}{h^2}(v_4 - 2v_3 + v_2) = -\frac{M}{EI} \quad (34)$$

$$\frac{1}{h^2}(v_3 - 2v_4) = -\frac{M}{EI} \quad (35)$$

### 3. Resultados e discussão

A seguir, estão representados os resultados para o método analítico, mediante figuras e tabelas. Na figura (7) apresenta-se o resultado analítico da equação (9), que representa a linha elástica  $v(x)$  da viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído da figura (1), neste caso considerando que  $E=I=L=q=1$ .

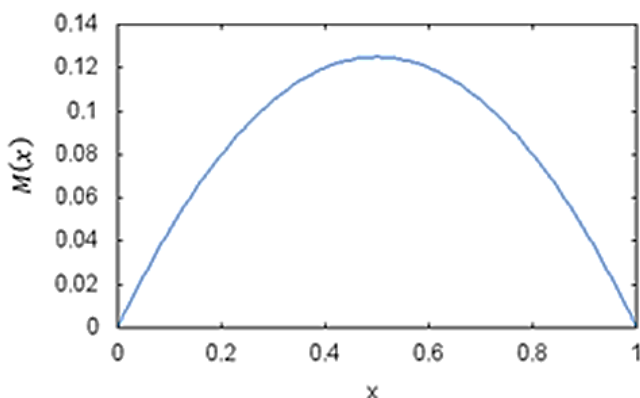


Figura 7 – Solução analítica da linha elástica  $v(x)$  de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Na figura (8) apresenta-se o resultado analítico para o momento fletor  $M(x)$  da mesma viga a partir da equação (10).

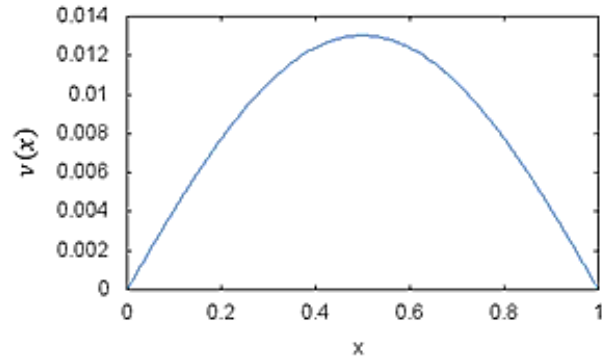


Figura 8 – Solução analítica dos momentos fletores  $M(x)$  de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído.

Na tabela (1) são apresentados diferentes valores analíticos para a deflexão e momento fletor desde as equações (9) e (10).

Tabela 1 – Valores de  $v(x)$  e  $M(x)$  desde a solução analítica eq.(9) e (10) para uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído.

x	v(x)	M(x)
0	0	0
0,25	0,009277344	0,09375
0,5	0,013020833	0,125
0,75	0,009277344	0,09375
1,0	0	0

A continuação, os resultados para o método numérico (MDF), representado mediante figuras e tabelas. Analisando a mesma viga conforme a figura (1), disposta numa malha com apenas três nós internos, de acordo com a figura (5), só é possível encontrar os valores de deflexão e momento fletor no centro da viga, já que nas bordas o valor é nulo.

Na tabela (2), são os resultados numéricos para a deflexão e momento fletor da viga, usando três nós. Considere  $E=I=L=q=1$ .

Tabela 2 – Valores de  $v(x)$  e  $M(x)$  desde solução numérica de uma viga simplesmente apoiada com utilização de três nós.

x	v(x)	M(x)
0	0	0
0,5	0,015625	0,125
1,0	0	0

Aumentando o número de nós, é de se esperar um número maior de pontos a serem averiguados.

Considerando na viga cinco nós internos, conforme a figura (6), então os resultados numéricos estão apresentados na tabela (3) onde  $E=I=L=q=1$ .

Tabela 3 – Valores de  $v(x)$  e  $M(x)$  desde solução numérica MDF de uma viga simplesmente apoiada com utilização de cinco nós.

x	v(x)	M(x)
0	0	0
0,25	0,009765625	0,09375
0,5	0,013671875	0,125
0,75	0,009765625	0,09375
1,0	0	0

A figura (9) ilustra o comportamento da linha elástica da viga, a partir da tabela (3).

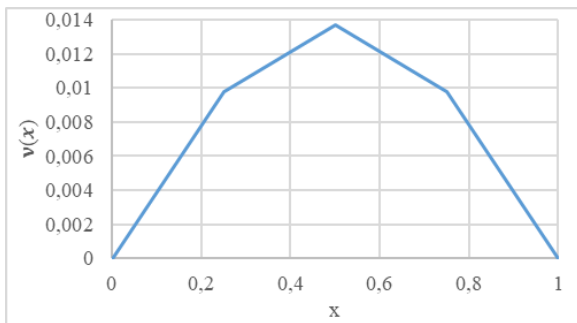


Figura 9 – Solução numérica da linha elástica  $v(x)$  de uma viga desde a tabela (3) considerando cinco nós internos.

A figura (10) representa o comportamento dos momentos fletores  $M(x)$  para a mesma viga desde a tabela (3).

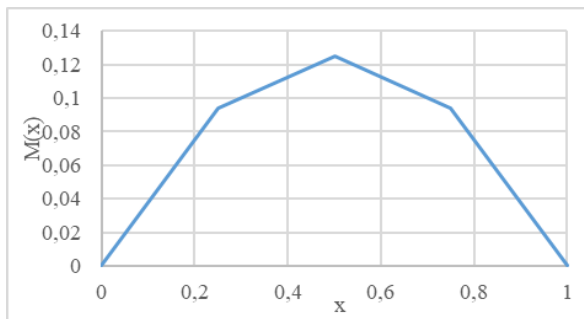


Figura 10 – Solução numérica dos momentos fletores  $M(x)$  de uma viga, desde a tabela (3) considerando cinco nós internos.

Percebe-se que o método numérico proporciona um resultado cada vez mais satisfatório à medida que a quantidade de nós aumenta. Para um número ainda maior de nós internos (7, 9, ...), há a necessidade do uso de alguma ferramenta computacional para auxílio nos cálculos. No caso dos momentos fletores, verifica-se um resultado bastante satisfatório, ainda que com poucos nós na malha.

A figura (11) a seguir sobrepõe os resultados encontrados da linha elástica para a viga analisada: em vermelho, a solução analítica; em verde, a solução numérica pra viga discretizada em três nós; e em azul, a solução numérica pra viga discretizada em cinco nós.

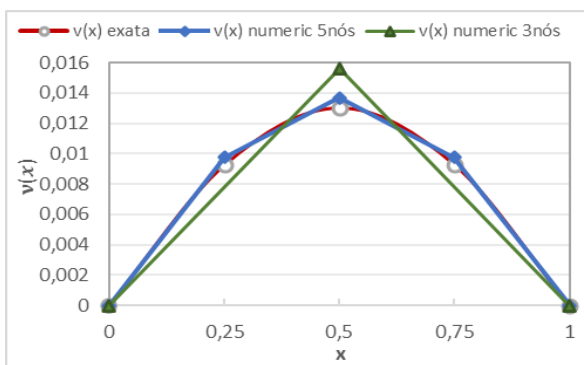


Figura 11 – Linha elástica  $v(x)$  da viga, resultados numéricos: linha cor azul: 05 nós, verde 03 nós), resultado analítico: linha vermelha.

A figura (12) a seguir sobrepõe os resultados encontrados dos momentos fletores para a viga analisada: em

vermelho, a solução analítica; em verde, a solução numérica pra viga discretizada em três nós; e em azul, a solução numérica pra viga discretizada em cinco nós.

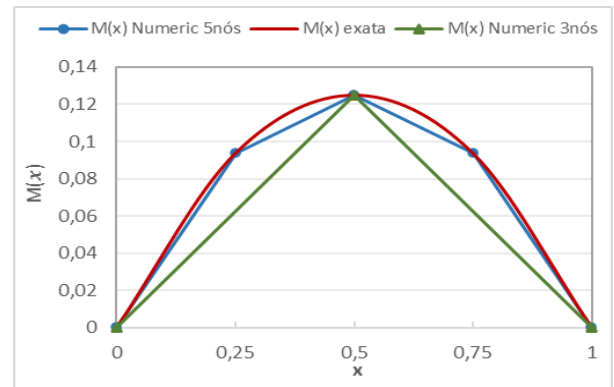


Figura 12 – Momento Fletor  $M(x)$  da viga, resultado numérico: linha cor azul 5 nós, verde 3 nós, resultado analítico: linha vermelha.

Já que a viga analisada é biapoiada e submetida a um carregamento distribuído, a deflexão máxima da estrutura se encontra no centro da mesma ( $L=0,5$ ), facilmente observável das figuras (10) e (5). Sendo assim, a Tabela (4) a seguir representa valores de deflexão máxima da viga considerada, para diferentes discretizações da mesma, ou, diferentes quantidades de nós internos;  $h$  é a distância entre nós. O erro relativo percentual foi calculado de acordo com a solução analítica.

Tabela 3 – Valores de  $v(x)$  e  $M(x)$  desde solução numérica MDF de uma viga simplesmente apoiada com utilização de cinco nós.

n (n° nós)	h	v (MDF)	Erro (%)
3	0,5	0,015625	20
5	0,25	0,0136718	5
7	0,167	0,0133101	2,22
9	0,125	0,0131835	1,25
11	0,1	0,013093	0,8
13	0,083	0,013125	0,56

Para melhor visualização da convergência do método numérico “MDF” para o valor analítico, ilustram-se os resultados na figura (13). A solução numérica está representada em azul, enquanto a solução analítica está representada em vermelho.

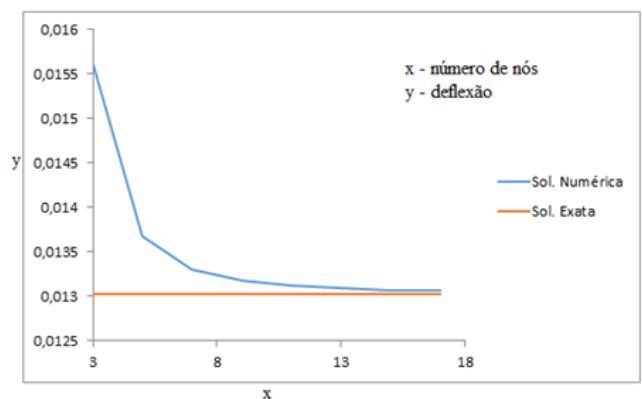


Figura 13 – Convergência do método “MDF” no cálculo de deflexão para uma viga simplesmente apoiada: linha cor azul: solução numérica; linha cor vermelha: solução analítica.

#### 4. Conclusão

A partir dos resultados obtidos neste estudo, concluímos que: i) a utilização de métodos numéricos, no caso o MDF, aplicado à equação diferencial governante de vigas, leva a um sistema de equações que proporciona resultados bastante satisfatórios, permitindo o cálculo da deflexão e do momento fletor em qualquer ponto da viga; ii) de acordo com a tabela (3) e a figura (13) percebe-se com uma discretização mais refinada da viga, com um maior número de nós, têm-se um valor mais aproximado da deflexão via método numérico em relação à deflexão via método analítico; iii) ainda de acordo com a tabela (3) a figura (13) percebe-se que um baixo número de nós com um erro considerável, como no caso da utilização de três nós que dá um erro percentual de 20 em relação à solução analítica; iv) ainda que o erro percentual tenha caído vertiginosamente à medida que viga foi sendo discretizada, chegando a ser menos de 1%, não houve uma aproximação exata até o número de 13 nós; v) logo, a utilização de ferramentas computacionais se faz necessária para um cálculo mais refinado, já que o número de equações passa a ser muito grande com muitos nós, sendo inviável o cálculo manual.

#### Referências

- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014. *NBR 6118:2014 Projetos de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro.
- Beer, F.P., Johnston, E.R., Dewolf, J.T. e Mazurek, D.F., 2011. *Mecânica dos Materiais*. 5 ed. Porto Alegre: AMGH.
- Castro, L.M.S., 2001. *Análise de vigas em fundação elástica*. Apontamentos da disciplina de Matemática Aplicada da EST-IPCB, pp.20.
- Franco, A.D., 2011. *Métodos numéricos aplicados à Engenharia*. UTFPR, pp.1-9.
- Franco, N.B., 2006. *Cálculo numérico*. São Paulo: Person Prentice Hall, pp.431.
- Hibbeler, R.C., 2010. *Resistência dos Materiais*. 7 ed. São Paulo: Pearson Hall, pp.421.
- Ruggiero, M.A.G. e Lopes, V.L.R., 1996. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, pp.357.
- Szilard, R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis*. 1 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., p. 36.
- Timoshenko, S., 1967. *Resistência dos Materiais*. 3 ed. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S. A., pp.147-183.