



Ministério da Educação
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM
Minas Gerais – Brasil
Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas
Reg.: 120.2.095–2011 – UFVJM
ISSN: 2238-6424
Nº. 03 – Ano II – 05/2013
<http://www.ufvjm.edu.br/vozes>

A Ideia de um “Contexto da Descoberta” na Proposta Psicologista de Jacques Hadamard

Prof^a. Dr^a. Raquel Anna Sapunaru
Instituto de Ciência e Tecnologia - ICT - UFVJM - Diamantina - Minas Gerais - Brasil
E-mail: raquel.sapunaru@ict.ufvjm.edu.br
<http://lattes.cnpq.br/7032234774356669>

Prof. Dr. Douglas Frederico Guimarães Santiago
Instituto de Ciência e Tecnologia - ICT - UFVJM - Diamantina - Minas Gerais - Brasil
E-mail: douglas.santiago@ict.ufvjm.edu.br
<http://lattes.cnpq.br/0791925989169133>

Aron Seixas Terra Rodrigues
Graduando de Engenharia Química - Instituto de Ciência e Tecnologia - ICT - UFVJM -
Diamantina - Minas Gerais - Brasil
E-mail: aronseixas@yahoo.com.br
<http://lattes.cnpq.br/9851908332133313>

Resumo: O texto discute, brevemente, como acontece a invenção matemática na visão do matemático Jacques Hadamard. O momento da invenção ou criação dos objetos matemáticos pode ser comparado ao conceito de contexto da descoberta de Karl Popper, apesar de Hadamard nunca ter relacionado estes dois acontecimentos. Estes acontecimentos têm um enorme valor heurístico. Na sequência, enfatizamos também toda análise psicológica que suporta esse instante criativo, conforme descrita por Hadamard e, nos aprofundamos em sua vasta bibliografia, trazendo à tona alguns nomes da Filosofia da Psicologia e da Educação às vezes esquecidos, como Binet,

Müller e Souriau. Em suma, objetivamos mostrar a importância da análise das descobertas ou invenções matemáticas para a Filosofia da Ciência e para a Educação.

Palavras-Chave: Hadamard. Filosofia. Educação. Psicologia.

“A intuição não testada e não comprovada é, uma garantia insuficiente da verdade”. (Bertrand Russell)

INTRODUÇÃO

Este artigo visa discutir brevemente a ação/influência da psique humana no processo criativo da matemática a partir das ideias discutidas no livro “A psicologia da invenção da Matemática”, de 1963, escrito por um dos maiores matemáticos do século XX, Jacques Hadamard. Para tal, partiremos de um pressuposto básico, a saber: os objetos matemáticos não existem, são construídos como modelos. Assim, a matemática consiste apenas de axiomas, definições e teoremas, isto é, de “fórmulas matemáticas”*. Por exemplo, existem regras pelas quais se deduz uma fórmula a partir de outra, mas as fórmulas não são acerca de coisa alguma: são apenas combinações de símbolos. No “formalismo”, nome dado a essa corrente interpretativa da matemática, as fórmulas matemáticas se aplicam por vezes a problemas físicos. Quando se dá a uma fórmula uma interpretação física, ela ganha um significado e, pode ser verdadeira ou falsa. Porém, essa veracidade ou falsidade tem a ver com a própria interpretação física. Logo, enquanto fórmula puramente matemática, ela não tem significado algum†.

Nesse contexto, a começar com o título da obra, “A psicologia da invenção da Matemática”, Hadamard faz uma menção à invenção e, na sequência, outra à

* Chamaremos a “fórmulas matemáticas” apenas de fórmulas.

† A corrente matemática oposta ao “formalismo” chama-se “platonismo”. Para o “platonismo”, os objetos matemáticos são entidades reais. A sua existência é um fato objetivo, totalmente independente do nosso conhecimento. Conjuntos infinitos, conjuntos infinitos não numeráveis, variedades de dimensão infinita, curvas que preenchem o espaço, etc., são objetos bem determinados, com propriedades fixas e particulares, sendo algumas conhecidas e muitas delas desconhecidas. Estes objetos não são, naturalmente, objetos físicos ou materiais. Existem fora do espaço e do tempo. São imutáveis, não foram criados num qualquer passado longínquo e não mudarão nem desaparecerão no futuro. Qualquer questão significativa acerca de um objeto matemático tem uma resposta bem determinada, quer seja possível determiná-la ou não. De acordo com o platonismo, um matemático trabalha empiricamente, isto é, ele não pode inventar nada, porque tudo já existe: tudo o que ele pode fazer é descobrir.

descoberta. A diferença entre invenção e descoberta é que a primeira representa a percepção de algo previamente existente (fenômeno ou lei), mas imperceptível até então. A seu turno, a invenção pode ser entendida como uma criação feita a partir de uma descoberta como, por exemplo, Torricelli que observou que em um tubo “U” o mercúrio sobe até certo ponto (descoberta *per se*) e, então, inventou o barômetro (invenção *in se*). (HADAMARD, 2009, p.13)

Na sequência deste artigo estaremos analisando os capítulos, um a um, em busca de um entendimento mais amplo do pensamento de Hadamard. Ao final dessa análise, aplicaremos algumas de suas ideias na transição de um problema original de Euclides, de base puramente geométrica, para um entendimento facilitado pela álgebra moderna. Reforçamos que nas anotações de Hadamard encontram-se elementos capazes de elucidar o porquê da facilidade que a algebrização tem sobre a geometrização de proposições matemáticas gerais. *Grosso modo*, mostraremos que o entendimento de certas proposições depende da facilitação que a álgebra proporciona e que tudo isso passa pelo psicológico criador da matemática.

2. PRINCIPAIS CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA DE HADAMARD

Para Hadamard, a pesquisa matemática dispõe de dois tipos de métodos, a saber: o “subjuntivo” e o “objetivo”. Nos métodos “subjuntivos”, toda informação provém de um mesmo pensador, logo os resultados acarretarão no ponto de vista deste e, essa característica é o ponto negativo deste tipo de método. A seu turno, no método “objetivo” há uma separação entre pensador e experimentador. Assim sendo, para se chegar aos resultados esperados pelos “subjuntivos” serão necessárias muitas repetições e, com isso, ele se torna um método mais difícil de ser empregado. (HADAMARD, 2009, p.17)

Mesmo admitindo a existência e a validade destes dois métodos na invenção matemática, Hadamard ressalta que não foram realizados muitos estudos sobre elas. No entanto, o autor dá um exemplo de um estudo semelhante, a saber: o da fenologia. A fenologia é um o estudo de aptidões (como a matemática) pela forma do cérebro, mas seus resultados não foram muito aceitos pelas academias devido à inexatidão e

imprecisão da teoria. Por exemplo, é fato que a forma do crânio de pessoas como Newton, Leibniz e Gauss nada diz de concreto sobre suas habilidades matemáticas e, portanto, essa teoria parece não fazer muito sentido. (HADAMARD, 2009, p.20)

Um outro problema diz respeito às considerações feitas pelos psicólogos. No que tange esses profissionais, há divergência sobre o contexto da descoberta matemática[‡]. Enquanto uns colocam que ela é ao acaso, outros permanecem na teoria do raciocínio sistemático. Para Hadamard: “Muitos psicólogos também refletiram, não especificamente sobre a invenção matemática, mas sobre a invenção em geral.” (HADAMARD, 2009, p.21) Voltando ao contexto da descoberta, alguns psicólogos dão demasiada importância ao método matemático da descoberta de um resultado (no geral) por meio de “sonhos matemáticos”. Este método é aquele no qual durante um sonho se chega a um determinado resultado, mas, novamente, não há um resultado universal sobre todo o estudo. Na análise de Hadamard:

[...] se só considerarmos nessa categoria os casos em que se tenha lembrança exata de raciocínio durante o sono e se colocarmos de lado os casos em que um resultado aparece de repente no momento do despertar, casos que examinaremos mais adiante. (HADAMARD, 2009, p.22)

Nessa perspectiva, interpretamos que as críticas ao contexto da descoberta matemática estão vinculadas ao fato de que a teoria psicológica não fornece explicações completas, pois: a) elas não fornecem explicações sobre o comportamento psicológico dos indivíduos; b) se isso pode ou não interferir no resultado da pesquisa; e c) se a partir de então é possível fazer alguma descobertas por utilizando um método ligado somente à psicologia.

Ao final das digressões desse capítulo, Hadamard lembra que o físico-matemático francês Henri Poincaré fez uma exposição conjurando as áreas de psicologia/matemática/filosofia da ciência para mostrar uma relação entre o consciente e inconsciente e, entre o lógico e fortuito. Segundo Poincaré, dessas relações surgiu o exemplo das relações fuchianas. Como elas foram descobertas inconscientemente e,

[‡] Tomaremos a liberdade de utilizar a terminologia de Popper, a saber: contexto da descoberta e contexto da verificação. A título de esclarecimento, o primeiro, o contexto da descoberta, se refere ao momento criativo da descoberta de “algo” relacionado à matemática. Já o segundo, o contexto da verificação, diz respeito ao desenvolvimento desse “algo” descoberto.

mais tarde conscientemente percebeu-se do que se tratavam essas funções. (POINCARÉ apud HADAMARD, 2009, p.26) Outros autores geniais, como Gauss e Mozart, demonstraram o fato de a criação vir de modo inconsciente e independente da vontade de quem faz. Para eles isso se deu como uma “iluminação”, bem aos moldes do contexto da descoberta. (HADAMARD, 2009, p.30-31) A partir dessa ideia, continuaremos a discutir o inconsciente.

3. PRINCIPAIS DISCUSSÕES SOBRE O INCONSCIENTE

Partindo da hipótese de que as “iluminações” não se produzem por acaso, mas sim de um processo mental anterior, resultante de um acúmulo de informações, elas são processos inconscientes. A partir da observação da vida cotidiana podemos perceber e admitir a existência do inconsciente, mas o fato dele ser frequentemente associado a algo misterioso, muitos ainda duvidam da sua existência. O inconsciente tem uma característica: ele é capaz de reconhecer algo devido a uma série características simultâneas. Por exemplo: o inconsciente reconhece o rosto de uma pessoa, carregado de informações, mas, de modo comparativo, o consciente é capaz de reconhecer apenas uma característica. Sabemos que o consciente está voltado somente para uma única função e o campo de trabalho para onde ele está voltado é determinado de “trabalho”, mas nesse “trabalho” existe um ponto que está na periferia da consciência que se denomina “consciência marginal”. Para que este tipo de consciência possa ser acessada é *mister* focalizar aquilo que deve se tornar consciente. Por exemplo: o campo de visão está sempre focando um determinado ponto. Entretanto, há pontos marginais que não são percebidos de imediato, mas eles existem de um modo irregular e imperfeito e podem ser percebidos pelo campo de visão já estabelecido e alterados mediante a um determinado interesse do meio. (HADAMARD, 2009, p.41)

Retornando ao inconsciente, este pode ser dividido em vários graus (camadas), desde a mais superficial (consciência marginal), até a mais profunda. Esta camada mais profunda é o inconsciente automático, ou seja, é um inconsciente que realiza uma dada tarefa mediante a um hábito e não possui qualquer ligação ou obrigação com o

consciente. (HADAMARD, 2009, p.42) Vamos discutir agora a relação entre o inconsciente e o contexto da descoberta.

4. O INCONSCIENTE E A INVENÇÃO NO CONTEXTO DA DESCOBERTA

Com relação à abordagem da invenção, ou melhor, do que acontece no contexto da descoberta Poincaré defende a ideia de que a invenção não é uma ação do acaso, mas sim do inconsciente que através de uma combinação de ideias nem sempre tão extraordinárias. A partir do entendimento das ideias, uma a uma, se obtém uma combinação de ideias novas e assim por diante, até atingir uma combinação na qual se evidencia uma descoberta. Portanto, é a partir das combinações já feitas que a invenção acontece. A invenção segue regras necessárias para que ela aconteça. As escolhas que serão feitas são importantes e, estas escolhas ou combinação de ideias vão ser decisivas quando houver uma combinação entre as análises do consciente e as ideias provenientes do inconsciente. Além disso, há a passagem do resultado dessas combinações para a sensibilização do indivíduo, somada a sua vontade de realização, pois quem faz/intenta, tem que ter a vontade de fazer/inventar algo. (POINCARÉ apud HADAMARD, 2009, p.46-48)

Mais uma vez, retomando a questão do inconsciente esta é feita para responder perguntas como: “Onde acontece a seleção (das ideias)” e “Onde elas são excluídas”. A partir de então, este inconsciente tem como função edificar e organizar as ideias, verificar suas utilidades e, também, descarta-las. (HADAMARD, 2009, p.48) Devido a esses argumentos as explicações foram contestadas por aqueles que se fundamentam no processo de “iluminação” e acreditam nisto como a teoria a ser aceita, ao contrário do inconsciente. O fundamento da argumentação em favor da “iluminação” é relativamente simples: seu processo provém de um cérebro fresco e descansado. Esta é a hipótese do descanso ou, aquilo que causa a “iluminação”. Além disso, a causa desse fenômeno pode ser a ausência de ingerências, ou seja, a eliminação de falsos princípios que levariam às falsas vias do descobrimento. Esse aspecto da “iluminação” se denomina hipótese do esquecimento. (HADAMARD, 2009, p.49) A título de ilustração, com base no raciocínio inicial e na ideia da hipótese do repouso, Helmholtz

deu um depoimento citando como o descanso influenciou na descoberta de novas ideias e como o surgimento destas veio de encontro as suas hipóteses. Do mesmo modo, o químico J. Teeple mostrou que num período de trabalho intenso ele havia se esquecido de trabalhos realizados de modo consciente. Esse fato faz valer da hipótese do esquecimento, visto que ela faria o indivíduo esquecer-se de certas situações e, portanto, criaria nele um olhar novo e diferente para a mesma situação. Todavia, no que se refere à “iluminação”, estas hipóteses não são muito aceitas, pois partem do princípio que as ideias surgem ao acaso, independentemente de qualquer acontecimento. (HADAMARD, 2009, p.53)

Discutiremos agora outros pontos de vista e teoria sobre a “iluminação” e sobre o inconsciente. Uma objeção feita ao método da “iluminação” é que esse método é proveniente da consciência marginal. Assim, mesmo operando de longe da consciência, ela seria a responsável pelo processo descrito como “iluminação”. A outra hipótese é: a “iluminação” vem como uma espécie de aviso que se passando por uma premonição. Esse aviso prévio seria o responsável pelo processo de “iluminação” como um todo. (HADAMARD, 2009, p.45)

Já sobre o inconsciente, partindo das conclusões sobre o que já se sabe, temos um inconsciente automático que funciona à revelia da nossa vontade. Porém, há também outra conclusão oposta: este inconsciente não é puramente automatizado, pois é capaz de discernir. *Grosso modo*, o inconsciente possuiria um tato delicado capaz de fazer escolhas. (HADAMARD, 2009, p.45) Esse critério foi bem aceito devido a um caráter histórico de misticismo que o inconsciente vem adquirindo, chegando ao ponto de colocá-lo em um patamar de divindade. (HADAMARD, 2009, p.45) Nessa linha de raciocínio, outra doutrina filosófica foi construída sob a seguinte crença, a saber: o inconsciente é um espírito que obriga as pessoas a fazerem coisas que elas não querem. Este espírito poderia ser, inclusive, maléfico. Essas questões podem remeter a processos histórico-místicos, mas não vale a pena entrar neste mérito, pois para a ciência não interessa se o espírito é superior ou inferior ao consciente. A partir daqui trataremos da abordagem lógica da invenção matemática.

5. A LÓGICA E O ACASO

Dado um problema qualquer que apareça durante um trabalho, a solução deste não aparecerá com uma mera noite de sono: isso seria muito cômodo e fácil. O trabalho para a solução do problema vem do consciente e muitas das suas respostas vêm do raciocínio lógico. (HADAMARD, 2009, p.61) Considerando agora o caso inverso, o das inspirações, para Poincaré a sua própria inspiração teve como ponto de partida um trabalho preliminar intenso realizado de forma consciente. Porém, segundo o este matemático, logo após ter sido obrigado a deixá-lo de lado durante um certo tempo, a solução apareceu repentinamente. (HADAMARD, 2009, p.62) Desta mesma maneira, Helmholtz assinalou que o processo de “iluminação” deve ser precedido por um estágio de preparação. Independentemente das razões já citadas, a descoberta não pode ser fruto somente do acaso, embora ela tenha relação com o trabalho preliminar. (HADAMARD, 2009, p.63) Assim sendo, não se pode considerar que o consciente suborna o inconsciente. Para ilustrar esse pensamento tomemos o ato de estudar uma questão. Este ato consiste em mobilizar as ideias das quais podemos esperar uma solução desejada. Além disso, pode ser que haja um trabalho no qual não se observe nenhum resultado satisfatório num primeiro momento, mas a partir de outras observações poderemos rever este resultado. (HADAMARD, 2009, p.64-65)

Sob essa luz, a lógica e o acaso na descoberta pode se resumir em uma questão: O que deve ou não ser priorizado no processo criativo? Não há única resposta. Devemos esperar muitos autores priorizam a lógica e outros priorizam o acaso. O emprego da lógica em uma ideia está em poder usá-la para comparar os resultados e as proporções entre os resultados e, portanto, analisar somente o que é satisfatório. Já a utilização do acaso pode acarretar numa quantidade rara de soluções possíveis, mas nem sempre úteis. O uso do acaso, principalmente em ciências experimentais ou na matemática, pode levar a severos erros. Nessas duas áreas, o fato de não se encontrar a solução de um dado problema implica que o mesmo será encontrado por outro pesquisador. Esse fato é denominado de fracasso. Além disso, existe também o chamado fracasso “paradoxal”, no qual o pesquisador não encontra uma aplicação importante para a sua solução. No entanto, se essa solução tem uma

aplicação lógica para outro pesquisador, ela deixa de ser um fracasso e passa a ser um sucesso. (HADAMARD, 2009, p.67) Na sequência, exploraremos um pouco mais os detalhes concernentes ao psicologismo do trabalho matemático criativo.

6. O TRABALHO CONSCIENTE ULTERIOR

As três etapas iniciais do trabalho matemático criativo são, a saber: 1) a preparação; 2) a incubação; e 3) a “iluminação”. A quarta etapa é a do consciente que tem por finalidade expor os resultados do inconsciente, assim como outros motivos relacionados. A partir de agora, analisaremos estes motivos:

1) Verificação: Alguns resultados podem ser obtidos do inconsciente sendo então necessária uma verificação do consciente para validar os resultados. (HADAMARD, 2009, p.75)

2) Acabamento: Nem todos os resultados estão completamente expostos e prontos. Portanto, é necessário lançar mão do consciente para poder terminar os trabalhos. Essa função consciente não é realizada por um inconsciente instintivo como se pensa, pois, se fosse, ela seria executada de modo automático e, quando se voltasse para o consciente, já estaria cumprida. (HADAMARD, 2009, p.75-76) Como observamos em nossas experiências diárias, isso não acontece.

Uma outra questão que diz respeito a essa discussão é a nossa própria análise sobre o trabalho que realizamos. Quando obtemos um resultado satisfatório é possível que percamos o interesse na pesquisa. Neste momento, iniciamos a redação da mesma:

3) Resultados intermediários: É onde os dois pontos anteriores tomam outro sentido, caso os consideremos como etapas não como um resultado final, ou seja, utilizá-lo-emos como um processo reflexivo de aplicações. (HADAMARD, 2009, p.79)

É importante ressaltar que os meios citados e suas consequências são feitos pelo próprio consciente, pois o inconsciente mesmo mostrando uma via para achar um resultado não consegue mostrar como chegou ao resultado e esse conhecimento, às vezes, é muito utilizado. (HADAMARD, 2009, p.79) Resumindo, o prosseguimento da invenção exige como parte inicial o trabalho de preparação já citado. Depois, um certo

estágio da pesquisa é completado. A etapa seguinte exige um novo impulso que só pode ser gerado e dirigido quando o nosso consciente leva em conta o primeiro resultado obtido. Um exemplo de fácil compreensão: quando duas retas paralelas se cortam por outras duas retas paralelas, os segmentos assim determinados são iguais, dois a dois. Isso é sabido de forma consciente ou não, mas enquanto isso não é enunciado de forma consciente, não se pode deduzir nenhuma das suas consequências, como por exemplo, a semelhança. (HADAMARD, 2009, p.80-81)

A partir daí, é possível que se tenha um trabalho inteiramente consciente. Em suma, cada parte da pesquisa deve ser articulada com a seguinte por resultados precisos, sendo eles denominados de resultados intermediários. Quando se consegue uma articulação com esses resultados, o consciente toma a decisão de que direção prossegue a pesquisa. O avanço da pesquisa teria sido impossível não só sem a verificação dos resultados, mas, sobretudo sem o uso dos resultados intermediários, os quais podem ser explorados ao máximo. Por exemplo: ao cortar um triângulo com uma reta paralela a um dos seus lados obteremos um triângulo semelhante ao primeiro. Esse fato, evidente *em se*, necessitava ser enunciado com precisão para fornecer a longa série de propriedades que dela decorrem. (HADAMARD, 2009, p.81) Retornamos agora à análise descoberta matemática, só que diversificaremos as ideias numa discussão mais direcionada.

7. A DESCOBERTA OU O CONTEXTO DA DESCOBERTA COMO SÍNTESE: A AJUDA DOS SINAIS

Sobre a síntese na descoberta, o filósofo francês das invenções da teoria em seu livro *Theorie de L'invention*, de 1881, Paul Souriau escreve:

Saberá o algebrista o que tornam suas ideias quando ele as introduz nas fórmulas sob a forma de sinais? Ele as segue em todas as fases da operação que está efetuando? Certamente não. Logo as perde de vista. Ele só se preocupa com alinhar e combinar, de acordo com as regras conhecidas, os sinais materiais tem sob os olhos; e aceita com plena segurança o resultado obtido. (SOURIAU, 1881, p.127)

Em suas pesquisas, os matemáticos possuem pontos de vista distintos. Assim sendo, com relação à afirmação citada, ela pode ser considerada verídica até a fase de verificação e acabamento, pois então nestas partes, o matemático não possui uma confiança tão cega devido aos inúmeros erros de cálculo que poderão ocorrer. O cálculo ou a conferência da descoberta tem por função verificar se o resultado obtido do inconsciente, sujeito à falha, está correto. Caso esta verificação fracassar, ou seja, se o resultado não estiver correto, esse primeiro cálculo é falso e a inspiração verdadeira. (HADAMARD, 2009, p.83)

Por essa razão, as palavras são os sinais que parecem cooperar melhor como o pensamento, sendo essas um assunto onde opiniões são bem divergentes. O filólogo Max Müller, no Prefácio de sua obra *Three Introductory Lectures on the Science of Thought*, de 1887, afirma que não há pensamentos possíveis sem o uso de palavras, literalmente “Não há razão sem linguagem, não há linguagem sem razão”. (MÜLLER, 1909, iii) Nesse livro, o filólogo faz um levantamento histórico de opiniões a respeito da questão das palavras no pensamento. Por exemplo: os gregos inicialmente utilizavam apenas uma palavra para nomear linguagem e pensamento, *logos*; e, os eclesiásticos tinham uma opinião que se assemelha com esta opinião grega. (HADAMARD, 2009, p.86) No entanto, as imagens mentais do pensamento usual e concentrado podem ser acompanhadas de representações concretas, diferente das palavras. Aqui, falamos das imagens.

O psicólogo francês Alfred Binet em seu livro *Etude expérimentale de l'intelligence*, datado de 1903, realizou um estudo teórico-empírico para verificar a importância das imagens na formação das ideias matemáticas. O método utilizado pelo cientista é composto de experiências em nas quais ele perguntava ou falava uma palavra e depois registrava o que isso sugeria para o entrevistado. Nessas experiências, a conclusão que se pode chegar foi de que as imagens e as palavras nunca vêm juntas, isto é, elas estão sempre separadas. Para os psicólogos em geral, há dois tipos de pensamentos, a saber: a) o pensamento “livre”, pensamento vago sem nenhum objetivo específico; e b) o pensamento “concentrado”, quando há um direcionamento do mesmo para um fim. O segundo não se faz necessário, pois ele já é um pensamento dirigido, exigindo apenas certo esforço e concentração para controlá-

lo. Assim sendo, na série de experimentos de Binet, as palavras são úteis para darem forma e sentimentos e ao pensamento, visto que sem isso eles ficariam vagando no inconsciente até passarem para consciência plena. (BINET, 1903, p.66)

Além disso, há outros estágios da pesquisa sobre a descoberta matemática. Suponhamos que a consciência está concentrada nas imagens e, o raciocínio será introduzido na parte de “acabamento”, durante o estágio em que o inconsciente age. Há hipótese vigente afirma que o mecanismo que mais se enquadra é aquele que afirma que a ajuda da imagem é necessária para a conduta do pensamento. Essas imagens e suas significações estão em partes ligadas e em parte independentes, sendo que é a consciência marginal que dá um sentido a essa significação. Na sequência vem a parte de verificação e do acabamento, em que se atribui um raciocínio a eles. Particularmente, nos casos matemáticos esses acabamentos podem ser dados em formas de sinais e a presença das palavras só será necessária no momento da apresentação escrita. (HADAMARD, 2009, p.98-99) Curiosamente, uma enquete feita junto a alguns matemáticos observou que na maioria dos casos evita-se a utilização de palavras ou até de sinais e expressões matemáticas no raciocínio. Usam-se quase sempre as imagens que geralmente são vagas! (HADAMARD, 2009, p.103)

No seio dessa discussão, tanto o autor como nós, não poderíamos deixar de pelo menos mencionar as ideias de Descartes. Nas *Regulae ad Directionem Ingenii*, a partir da 14ª regra, Descartes aborda a questão da imaginação nas ciências, particularmente, na matemática. (DESCARTES, 1999, p.107-145) Descartes, de fato, queria eliminar a presença da imaginação das ciências e, por isso, também criticou a geometria euclidiana por utilizá-la. (HADAMARD, 2009, p.104-105) Em sua proposta de uma geometria algébrica, o filósofo francês tentou eliminá-la. Na opinião do filósofo Bertrand Russell, em seu livro *História da Filosofia Ocidental*.

Sua [de Descartes] grande contribuição para a geometria foi a invenção da geometria coordenada, embora não de todo em sua forma final. Empregava o método analítico, que supõe solucionado um problema e examina as consequências de suposição e aplicou a álgebra ou a geometria. (RUSSELL, 1982, p.84)

Sob essa luz, exemplificaremos a ideia de Hadamard mostrando duas proposições dos *Elementos* de Euclides na forma algébrica.

Começaremos com a proposição 14 do Livro V. (EUCLIDES, 2009, p.220) Tomemos quatro magnitudes em proporção A, B, C, D e está feita uma razão de proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, provar que se $A > C$, logo $B > D$. Partindo de $A > C$, se for feito a divisão de ambas pela magnitude B terá a relação $\frac{A}{B} > \frac{C}{B}$, mas como foi dito $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ pode-se relacionar as duas a fim de se obter $\frac{C}{D} > \frac{C}{B}$, e a partir de então, as relações entre D e B serão feitas. Multiplicando os dois lados por BD e dividindo os dois lados por C tem-se $\frac{BCD}{CD} > \frac{CBD}{CB}$ e depois realizando as devidas simplificações se obtém $B > D$ que era o que se desejava provar. A partir desse modelo, pode-se estender para qualquer razão de proporção, ou seja, para $A < C$, logo $B < D$ e $A = C$ e $B = D$.

Agora trabalharemos com a proposição 15 do Livro V. (EUCLIDES, 2009, p.220-221) Começando com quatro magnitudes AB, C, DE, F e logo em seguida estabeleça $AB = nC$ e $DE = nF$, onde “n” é um multiplicador qualquer dos segmentos C e F, a partir disso demonstrar que $\frac{C}{F} = \frac{AB}{DE}$. Como AB e DE são “n” vezes maior do que C e F respectivamente terão então postos “n” segmentos C inseridos em AB, assim como “n” segmentos F inseridos em DE. Como proposto o multiplicador “n” vai manter uma razão constante para toda e qualquer proporção, logo $\frac{C}{F} = \frac{nC}{nF}$, mas foi estabelecido $AB = nC$ e $DE = nF$, logo terá a relação $\frac{C}{F} = \frac{AB}{DE}$, e com isso está demonstrado.

Diante da linguagem matemática, seja ela geométrica seja ela algébrica, uma questão se revela: O pensamento com palavras tem inconveniente? No caso particular da matemática, pensamos que sim. Há quem pense com palavras, como o filólogo Max Müller, mas há quem pense com imagens. Max Müller chama a atenção para incompreensão que as palavras podem causar, e assim sendo, poderão ser fonte de erro. Os estudiosos que usam as palavras no pensamento não só compreendem o sentido das mesmas, mas também qualquer gênero de sinais auxiliares desempenham na colocação das ideias. A partir de então, os estudiosos aplicam de maneira mais ou menos consciente alguns métodos para poder conceder as palavras o papel de mostrar o que lhes pode ser mais conveniente. (HADAMARD, 2009, p.109-111) Argumentamos que para estes estudiosos, palavras e conceitos significam a mesma coisa. Os sinais

podem ser um apoio necessário para o pensamento, seja no estágio de formulação ou de exposição. A linguagem é o sistema mais usual, mas o pensamento criativo costuma usar outros sistemas menos padronizados que a linguagem habitual. Estes sistemas podem imprimir um maior dinamismo ao pensamento. Prosseguimos abordando os tipos de matemáticos: como trabalham e como criam.

CONCLUSÃO: A VARIEDADE DOS ESPÍRITOS MATEMÁTICOS

A utilização do bom senso como forma de raciocínio significa que o inconsciente desempenha um papel significativo e que a consciência ulterior é pouco usada. Além disso, o inconsciente é bem mais superficial e o reconhecimento de dados não seja diferente do raciocínio normal. Em muitos casos, as vias seguidas pelo bom senso podem ser bem diferentes das vias habituais de raciocínio. Muitos desses raciocínios usados são provenientes de experiência vividas e estão alocados no inconsciente, sendo que essas experiências nem sempre são empíricas. (HADAMARD, 2009, p.121)

O estágio que sucede o do bom senso é para onde o pensamento humano migrou: o estágio científico. O pensamento científico é marcado principalmente pela verificação, pelo acabamento e por se tornar utilizável. Esses pontos são importantes, pois imprimem uma certeza ao conhecimento adquirido. Essa ideia de verdade passada pela ciência proporciona ao pensamento uma fecundidade e uma futura possibilidade de extensão. Essas séries de características auxiliam na compreensão psicológica da passagem do estágio do bom senso, quase intuitivo, para um segundo estágio, a saber: o estudante de matemática. No que se refere ao estudante de matemática é fácil ele se deparar com o fracasso, pois o trabalho realizado para encontrar a solução de um problema de álgebra ou de geometria é considerado uma invenção. Para o matemático e filósofo Poincaré a incapacidade que muitos têm de realizar esse trabalho é baseada em uma diferença: enquanto uns examinam cada silogismo que compõe um teorema e se os mesmos estão de acordo os estudantes entendem, outros além de examinarem cada silogismo, querem também saber o porquê de certas articulações ou expressões e, com isso, não compreendem a demonstração de um teorema. (HADAMARD, 2009, p.125) A passagem do trabalho para o estudante de matemática é feita de maneira

consciente, pois se trata de uma exposição oral ou escrita de um problema ou teorema. Além do mais, nessa etapa não foi feito nenhum trabalho de síntese e a maior dificuldade encontrada pelos estudantes de matemática é de querer encontrar alguma síntese na demonstração. Por isso eles têm muitas dificuldades em relação aos que não encontram esse processo de síntese, visto que estes conseguem seguir no processo de entendimento. (HADAMARD, 2009, p.125)

Já na etapa profissional, por assim dizer, os matemáticos são aqueles pensadores capazes não só de compreender as teorias matemáticas, mas também de procurar novas teorias. Esse grupo de pensadores pode ser dividido entre matemáticos intuitivos e matemáticos lógicos. Poincaré, no livro O valor da ciência, afirma:

É impossível estudar as obras dos grandes matemáticos, e mesmo as dos pequenos, sem notar e sem distinguir duas tendências opostas, ou antes, dois tipos de espíritos inteiramente diferentes. Uns estão preocupados com a lógica; aos ler suas obras, somos tentados a crer que só avançaram passo a passo, [...]. Outros se deixam guiar pela intuição, e na primeira investida fazem conquistas rápidas, mas algumas vezes precárias, como se fossem ousados cavaleiros na linha de frente. (POINCARÉ, 2000, p.13)

Mesmo assim, Hadamard pensa que não se pode citar uma definição relacionando intuição em oposição à lógica. Resumidamente, todos os resultados obtidos apontam que o trabalho de descoberta conta com uma participação do inconsciente. As etapas deste trabalho de descoberta são: 1ª.) o trabalho superficial, ou mais ou menos profundo; 2ª.) o trabalho preliminar consciente; 3ª.) o espírito se encarrega de usar representações concretas para fazer combinações; e, por último 4ª.) a síntese. (HADAMARD, 2009, p.132)

Inicialmente, não existe uma descoberta perfeitamente lógica, pois esta necessita de uma intervenção vinda do inconsciente para dar sentido ao trabalho lógico. A partir disso têm-se os processos que podem se desenvolver em diferentes espíritos:

a) Mais ou menos profundo no inconsciente: O inconsciente é formado por várias camadas que vão de mais superficial ao mais profundo e o ponto onde se combinam as ideias podem ser qualquer um. O espírito mais intuitivo faz uma combinação de ideias em uma camada mais profunda e tende a trazer a ideia para o

consciente quando indispensável. Já o espírito lógico trabalha com as ideias no inconsciente superficial e daí elas são levadas por completo para o consciente.

b) Mais ou menos dirigido: O desencadeamento de ideias pode ser feita de maneira mais ou menos dispersa, sendo que o espírito intuitivo tem uma grande dispersão, enquanto o espírito lógico possui uma dispersão pequena.

c) Diferentes representações auxiliares: Os cientistas diferem a representação dos seus pensamentos podendo ser na forma de imagem ou representações concretas. Essas diferenças podem aparecer e influenciar em um trabalho podendo dar um curso mais lógico ou intuitivo ao pensamento do espírito. Porém, esse lado é menos acessível, pois os fenômenos nem sempre são compatíveis com diferentes espíritos. (HADAMARD, 2009, p. 132-134)

Abstract: Briefly, the paper discusses the mathematical invention in the view of the mathematician Jacques Hadamard. The moment of invention or creation of mathematical objects can be compared to the concept of discovery context of Karl Popper, although Hadamard never have related these two events. heuristic value. Further, we also emphasize that every psychological analysis supports this creative moment, as described by the author and, we dig into its vast literature, bringing out some names of the Philosophy of Psychology and Education sometimes forgotten, as Binet, Müller and Souriau. In summary, we aim to show the importance of the analysis of mathematical discoveries or inventions for the Philosophy of Science and Education.

Keywords: Hadamard. Philosophy. Education. Psychology.

REFERENCIAS

- BINET, A. **L'étude expérimentale de l'intelligence**. Paris: Schleicher Frères, 1903.
- DESCARTES, R. **Regras para a Orientação do espírito**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.
- HADAMARD, J. S. **Psicologia da invenção na matemática**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.
- MÜLLER, F. M. **Science of Thought**. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1909.
- POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2000.
- RUSSELL, B. **História da Filosofia Ocidental**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1982.
- SAPUNARU, R. A. Notas Sobre a “Propensão Quântica” Popperiana. In: OLIVEIRA, P. E. (org.) **Ensaio Sobre o Pensamento de Karl Popper**. Curitiba: Círculo de Estudos Bandeirante, 2012. p.184-197.
- SOURIAU, P. **Theorie de L'invention**. Paris: Librairie Hachette, 1881.