



Ministério da Educação  
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM  
Minas Gerais – Brasil  
Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas  
Reg.: 120.2.095–2011 – UFVJM  
ISSN: 2238-6424  
Nº. 03 – Ano II – 05/2013  
<http://www.ufvjm.edu.br/vozes>

## **Análise de parâmetros populacionais de municípios do nordeste mineiro**

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Jaqueline Maria da Silva  
Doutora em Modelagem Computacional pelo Laboratório  
Nacional de Computação Científica - LNCC  
Docente do Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia - ICET  
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM - Minas Gerais - Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/4343491423219191>  
E-mail: [jaquemsilva@gmail.com](mailto:jaquemsilva@gmail.com)

Jéssica Lemos Gomes  
Discente do Bacharelado em Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/0354364022237072>  
E-mail: [jelemos12@hotmail.com](mailto:jelemos12@hotmail.com)

Marcelo Alves Moreira  
Discente do Bacharelado em Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/2056000571606642>  
E-mail: [marcelomoreira10@yahoo.com.br](mailto:marcelomoreira10@yahoo.com.br)

Flávio Henrique dos Santos  
Discente do Bacharelado em Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/8929508068009154>  
E-mail: [flaviohenriquesantos@gmail.com](mailto:flaviohenriquesantos@gmail.com)

**Resumo:** Dentre os estudos populacionais, os que envolvem modelos matemáticos são os mais utilizados pela comunidade acadêmica. Neste trabalho, implementam-se computacionalmente dois modelos matemáticos e apresentam-se os resultados para discutir-se a dinâmica de crescimento das populações dos municípios estudados, frente ao estado de Minas Gerais e ao cenário sócio-econômico das unidades territoriais. Os modelos são o Modelo de Crescimento Natural (MCN) e o Modelo de Crescimento Logístico (MCL) e são aplicados nas populações do estado de Minas Gerais (MG) e dos municípios Capelinha e Teófilo Otoni. Consideram-se características sócio-econômicas de cada uma destas unidades territoriais (UTs). Estimam-se os valores dos parâmetros contidos nos MCN e MCL para representar as populações de cada uma das UTs citadas, assim como os parâmetros estatísticos  $X^2$  e  $R_a^2$  a que indicam a qualidade de cada ajuste realizado.

**Palavras-chave:** Modelos matemáticos. Crescimento logístico. Populações.

## Introdução

Minas Gerais (MG) possui a quarta maior área territorial (586.528 km<sup>2</sup>) entre os estados brasileiros, o terceiro maior Produto Interno Bruto – PIB e acolhe a segunda maior população. O seu PIB *per capita* está evoluindo, passou da 12<sup>a</sup> posição em 2004 para 9<sup>a</sup> em 2011, com os indicadores de continuar em ascensão (IBGE, 2011; GOVERNO DE MINAS, 2012). Este conjunto de dados confere ao povo mineiro um incentivo a permanecer em seu estado, e por outro lado, não são suficientes para promover imigrações expressivas de populações de outros estados para o estado de MG.

MG é um estado muito amplo e seus municípios propiciam um conjunto heterogêneo de oportunidades tanto em áreas de fortes atrativos, quanto em áreas rurais, industriais, comerciais e turísticos, etc., de maneira que a parcela da população eventualmente insatisfeita se reposiciona em outro ponto geográfico deste mesmo estado.

Para a realização do estudo apresentado neste trabalho escolheu-se os municípios de Capelinha e de Teófilo Otoni. Capelinha por ter sua base econômica fortemente vinculada a agricultura. A atividade está baseada na produção de café e de madeira (eucalipto) para atender a demanda nacional e para exportação. Possui uma indústria atrelada ao beneficiamento dos produtos agrícolas citados,

propiciando um comércio sólido e rentável ao município. Capelinha polariza uma microrregião constituída por 12 municípios essencialmente agrícolas.

Teófilo Otoni possui economia de natureza urbana. A baixa pluviosidade típica (concentrada em períodos específicos) não propicia uma atividade agrícola significativa (CANAL DO TEMPO, 2012). A economia urbana é baseada no comércio que é privilegiado pela sua posição geográfica: as principais vias rodoviárias de acesso ao nordeste do estado e ao nordeste do país se interceptam neste município, caracterizando-o como um entreposto comercial.

Este estudo científico baseado em modelos de equações diferenciais visa analisar os principais fatores que influenciam o crescimento dessas populações para quiçá contribuir em futuras implementações de planos de manejo e gestão de recursos naturais e de subsistência da região.

De acordo com a literatura, o Modelo de Crescimento Natural (MCN) foi o primeiro a representar o crescimento populacional (STEWART, 2011; SILVA, 2011). O modelo pressupõe que o crescimento é proporcional à própria população. Em 1789 o economista inglês T. R Malthus apresentou uma nova formulação matemática para o MCN, conhecida como Modelo Malthusiano. Posteriormente, em 1838 Pierre Verhulst supôs que uma população, vivendo em um determinado meio, possui um limite máximo de habitantes que, depois de alcançado, faz com que a população se estabilize. Desta proposta resultou o Modelo de Verhulst, ou Modelo de Crescimento Logístico (MCL) (SILVA, 2011; BASSANEZI, 2006).

Este trabalho apresenta as formulações analíticas dos MCN e MCL. Apresenta também a aplicação dos modelos aos dados demográficos do estado de MG e dos municípios de Capelinha e Teófilo Otoni. Algumas características sócio-econômicas de cada unidade territorial são consideradas nas interpretações dos resultados, assim como discussões sobre a qualidade de cada ajuste dos dados, através dos parâmetros estatísticos  $X^2$  e  $R_a^2$ .

## 1. Modelos de Crescimento Natural

O MCN considera que se  $P(t)$  for o número de indivíduos de uma população no instante  $t$ , sua taxa de crescimento populacional  $dP/dt$  é proporcional à população  $P(t)$  (BOYCE, 2006):

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \quad (1.1)$$

Onde  $r$  é a taxa de crescimento da população. A solução da equação acima é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (1.2)$$

Onde  $P_0$  representa a condição inicial,  $P_0 = P(0)$ . De acordo com a Equação 1.2, o número de indivíduos  $P(t)$  terá um crescimento natural se  $r > 0$  e decaimento natural se  $r < 0$ .

## 2. Modelo de Crescimento Logístico

O MCN proposto por Thomas Malthus prevê que determinada população irá crescer ou decrescer indefinidamente, o que não ocorre na realidade. Pierre Verhulst propôs um modelo que considera a estabilização da população, supondo que uma população, vivendo num determinado meio, poderá crescer até um limite máximo definido pelas condições do meio ambiente. Caso a ocupação de uma população seja superior à sua capacidade de suporte, esta população deverá sofrer uma redução populacional até se adequar as condições do meio.

O modelo de Pierre Verhulst, também chamado de Modelo de Crescimento Logístico (MCL), considera que o crescimento populacional seja dado pela expressão:

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P, P_M)P \quad (2.1)$$

Onde  $\beta(P, P_M)$  é uma função da população  $P(t)$  e da capacidade de suporte  $P_M$  do meio. É apresentado na forma:

$$\beta(P, P_M) = r_M \left( 1 - \frac{P(t)}{P_M} \right) \quad (2.2)$$

A expressão de  $\beta (P, P_M)$  relaciona propriedades da espécie e propriedades do meio. A característica da espécie é representada pela constante  $r_M$  ( $r_M > 0$ ) que representa a taxa de reprodutividade máxima da espécie (BASSANEZI, 2006). Biologicamente a taxa máxima de crescimento poderá ser observada quando  $P(t)$  estiver bem abaixo da capacidade de suporte  $P_M$ , e de fato quando  $P(t) \ll P_M$  temos a representação de um ambiente sem necessidade da população se adequar a limitações e competições por recursos de subsistência. A propriedade limitante do meio é representada por  $(1 - P/P_M)$ , de forma que  $\beta (P, P_M) > 0$  para  $P(t) < P_M$  e  $\beta (P, P_M) < 0$  para  $P(t) > P_M$ .

Reescrevendo a Equação acima, obtemos:

$$\frac{dP}{dt} = r_M \left( \frac{P_M - P(t)}{P_M} \right) P(t) \quad (2.3)$$

Cuja solução é dada por:

$$P(t) = \frac{P_M P_0}{(P_M - P_0)e^{-r_M t} + P_0} \quad (2.4)$$

### 3. Determinação de Parâmetros Populacionais

Abaixo, a Tabela 1 apresenta os dados demográficos do estado de MG e dos municípios de Capelinha e de Teófilo Otoni.

Ano	MG	Capelinha	Teófilo Otoni
1980	13.380.105	23.719	128.826
1991	15.743.152	30.338	140.033
1996	16.673.097	33.424	135.157
2000	17.891.494	31.231	129.424
2007	19.273.506	33.042	126.895
2010	19.597.330	34.803	134.745

Tabela 1: Populações do estado de MG e municípios de Capelinha e Teófilo Otoni, obtidas nos bancos de dados do IBGE, para o período de 1980 a 2010.

São analisadas e comparadas três populações distintas que diferem entre si em aproximadamente 500 vezes, como é o caso da população de MG em relação à população do município de Capelinha. Para que a construção dos gráficos propicie interpretações comparativas entre os resultados dos modelos aplicados às diferentes populações, surge a necessidade de realizar uma normalização dos dados demográficos.

Assim, seja a população relativa  $P(t)$ , definida da forma:

$$P(t) = \frac{P(t)}{P_0} \quad (3.1)$$

Usando a população relativa  $P(t)$ , o MCN Contínuo (Equação 1.2) e o MCL (Equação 2.4) passam a ser representados, respectivamente, pelas Equações 3.2, e 3.3:

$$p(t) = e^{rt} \quad (3.2)$$

$$p(t) = \frac{P_M}{(p_M - 1)e^{-r_M t} + 1} \quad (3.3)$$

Na Equação 3.3 a grandeza  $p_M$  representa a Capacidade de Suporte Relativa definida na forma:

$$p_M = \frac{P_M}{P_0} \quad (3.4)$$

A definição de  $p_M$  serve para eliminar  $P_0$  da população relativa do MCL. A Tabela 2 apresenta a população relativa de cada uma das regiões estudadas.

Ano	MG	Capelinha	Teófilo Otoni
1980	1	1	1
1991	1,177	1,279	1,093
1996	1,246	1,409	1,049
2000	1,337	1,317	1,005
2007	1,440	1,393	0,985
2010	1,465	1,467	1,046

Tabela 2: Populações relativas  $p(t)$  do estado de MG e municípios de Capelinha e Teófilo Otoni, obtidos a partir da Tabela 1, considerando as respectivas populações iniciais (do ano de 1980).

Abaixo, a Figura 1 apresenta a evolução das populações relativas  $p(t)$  contidas na Tabela 2 e respectivos ajustes obtidos via MCN e MCL.

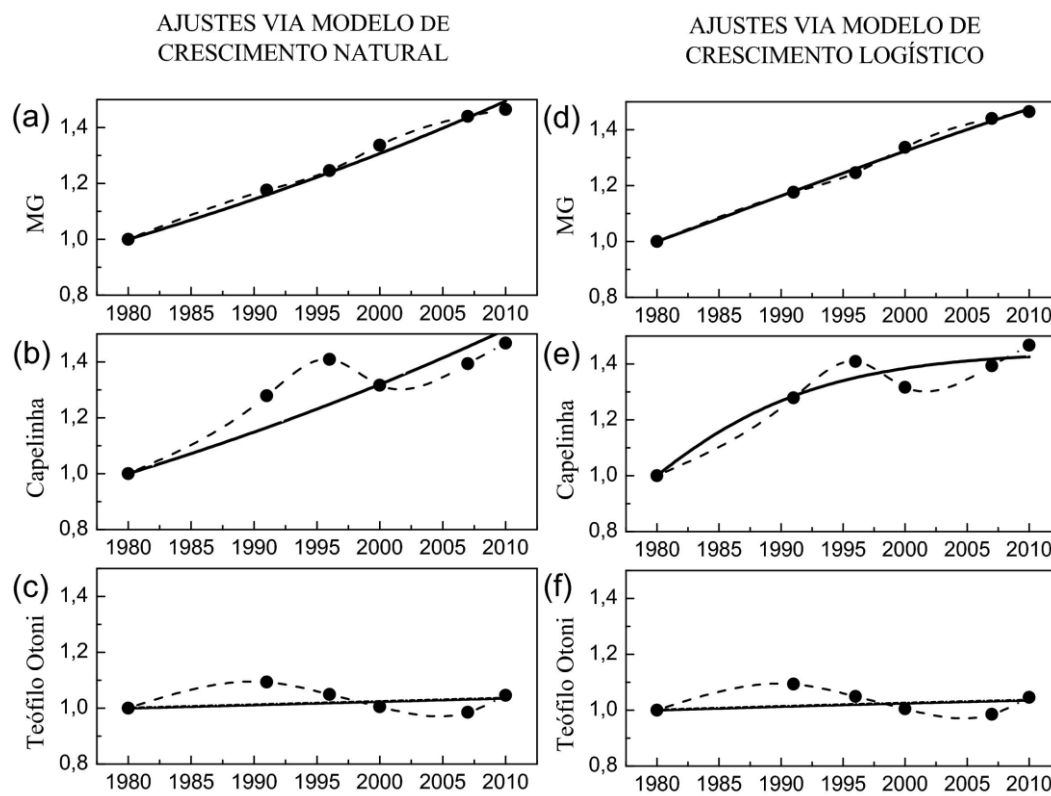


Figura 1: Populações normalizadas do estado de MG e municípios de Capelinha e Teófilo Otoni, e respectivos ajustes obtidos pelos MCN (a esquerda) e MCL (a direita). Os dados reais estão representados por pontos interligados por linhas tracejadas. Os ajustes obtidos estão representados por linhas contínuas.

Os parâmetros associados a cada ajuste contido na Figura 1 estão apresentados e discutidos nas subseções 3.1 e 3.2 a seguir. Também são apresentados e discutidos o coeficiente de dispersão  $X^2$  e o coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2$  que indicam qualidade de cada ajuste obtido.

### 3.1 Parâmetros para o Modelo de Crescimento Natural

A Tabela 3 apresenta os valores dos parâmetros (e seus desvios padrões) do MCN para o estado de MG e municípios de Capelinha e Teófilo Otoni. Apresenta também os parâmetros estatísticos  $X^2$  e  $R_a^2$  de cada ajuste.

Local	$r$	$X^2$	$R_a^2$
MG	0,0134±0,0003	0,0004	+0,97
Capelinha	0,0139±0,0013	0,0090	+0,67
Teófilo Otoni	0,0012±0,0009	0,0020	-0,23

Tabela 3: Taxas de crescimento  $r$  (valor e desvio padrão) obtidas para ajustes das populações frente ao MCN, e respectivos parâmetros estatísticos  $X^2$  e  $R_a^2$  dos ajustes.

A Tabela 3 indica que o melhor ajuste pertence aos dados populacionais de MG: a taxa de crescimento  $r$  de MG apresenta o menor desvio padrão e os parâmetros de qualidade do ajuste também são os melhores obtidos ( $R_a^2 \rightarrow 1$  e  $X^2 \rightarrow 0$ ).

A qualidade do ajuste também pode ser observada graficamente através da Figura 1(a) onde os pontos experimentais e o ajuste têm a mesma tendência de evolução e a dispersão observada é a menor dentre as três.

O município de Capelinha apresenta uma taxa de crescimento populacional  $r$  equivalente à apresentada pelo estado de MG, entretanto seu desvio padrão é superior, o maior observado entre as três unidades. O desvio padrão relativamente elevado da taxa  $r$  se reflete na quantificação da dispersão de Capelinha: o maior  $X^2$  apresentado na Tabela 3.

A observação das Figuras 1(a), 1(b) e 1(c) confirma uma dispersão relativamente elevada entre pontos experimentais e o ajuste para Capelinha. Observa-se que o município passou por um processo de crescimento populacional que culmina em 1996, seguido de uma redução populacional de aproximadamente 9,3% entre os anos de 1996 e 2000. A Figura 1(b) sugere que após o ano de 2000 o município de Capelinha retomou um ritmo de crescimento populacional regular.



Sobre Teófilo Otoni, verifica-se que a população apresentou a menor taxa de crescimento  $r$  entre as demais populações, conforme Tabela 3. A taxa  $r$  associada à população de Teófilo Otoni é pequena, a menor das três populações, o que também é observado ao comparar as inclinações dos ajustes das Figuras 1(a), 1(b) e 1(c).

A população de Teófilo Otoni também apresenta flutuações em torno do ajuste, tal como descrito para a população de Capelinha, mas para Teófilo Otoni estas flutuações ocorrem em menor intensidade. Este comportamento pode ser consequência de ações políticas, educacionais e econômicas estaduais ou nacionais que foram executadas naquele período.

### 3.2. Parâmetros para o Modelo de Crescimento Logístico

A Tabela 4 apresenta os valores dos parâmetros (e seus desvios padrões) do MCL para o estado de MG e os municípios de Capelinha e Teófilo Otoni. Apresenta também os parâmetros estatísticos  $X^2$  e  $R_a^2$  de cada um dos ajustes.

Local	$p_M$	$r_M$	$X^2$	$R_a^2$
MG	2,20±0,31	0,030±0,005	0,0001	+0,99
Capelinha	1,45±0,06	0,116±0,041	0,0030	+0,91
Teófilo Otoni	1,12±0,09	indefinido	0,0020	-0,20

Tabela 4: Capacidades de suporte relativa  $p_M$  e taxas  $r_M$  (e desvios padrões) obtidos por ajustes do MCL para as das populações relativas, e respectivos parâmetros estatísticos  $X^2$  e  $R_a^2$ .

Observa-se na Tabela 4 que o melhor ajuste obtido é novamente o da população de MG ( $X^2 \rightarrow 0$  e  $R_a^2 \rightarrow 1$ ). A qualidade deste ajuste supera a qualidade do ajuste obtida via MCN. Através da capacidade de suporte relativa  $p_M$  de MG e da Equação 3.5, pode-se prever a capacidade de suporte  $P_M$  de MG:

$$P_{M\text{ MG}} = (29 \pm 4) \text{ milhões de pessoas.}$$

O valor apresentado para a constante  $r_M$  da Tabela 4 permite estimar a taxa de crescimento médio de MG no período em estudo,  $\bar{\beta}(P, P_M)_{MG}$ :

$$\bar{\beta}(P, P_M)_{MG} = \left[ r_M \left( 1 - \frac{\bar{P}}{P_M} \right) \right]_{MG} ;$$

$$\bar{\beta}(P, P_M)_{MG} = 0,03 \times 0,45;$$

$$\bar{\beta}(P, P_M)_{MG} = 0,0135$$

Para o desenvolvimento acima, fez-se uso da equação 3.1, a qual permite estimar que o estado de MG apresentou, nos anos de 1980 e 2010, respectivamente, uma população de aproximadamente de 45% e 66% da sua capacidade de suporte, e portanto  $\bar{P}_{MG} \cong 0,55 P_{MG}$ .

O valor para a taxa de crescimento médio do CL  $\bar{\beta}_{MG} \cong 0,0135$  está em perfeita concordância com a taxa de crescimento  $r \cong 0,0134$  identificada via MCN para MG.

Observando os parâmetros de ajustes  $X^2$  e  $R_a^2$  do ajuste da população de Capelinha pode-se afirmar que a qualidade do ajuste obtido pelo MCL também é melhor que o ajuste obtido pelo MCN.

Uma análise da capacidade de suporte relativa de Capelinha,  $p_M = 1,45 \pm 0,06$ , indica que sua capacidade de suporte é  $P_M = 34 \pm 2$  mil habitantes, ou seja, desde o ano de 1996 este município alcançou sua capacidade de suporte.

Já o ajuste da população de Teófilo Otoni apresenta um coeficiente de dispersão associado  $X^2 = 0,002$  relativamente pequeno, e aparentemente indica um bom ajuste. Entretanto temos  $R_a^2$  com valor negativo, indicando que as flutuações da população têm um padrão não aleatório e pouco previsível pelo modelo, o que é observado pelo padrão oscilatório da população em torno do ajuste, conforme Figura 1.(e).

A capacidade de suporte relativa de Teófilo Otoni é  $p_M = 1,12 \pm 0,09$ , o que indica que sua capacidade de suporte é  $P_M = 143 \pm 12$  mil habitantes.

A taxa  $r_M$  associada à Teófilo Otoni apresentou valores não realísticos e desvio maior que a própria grandeza, tornando-a indefinida. Para justificar a indefinição da constante  $r$  basta observar que o município apresenta uma população que alcançou a condição de suporte desde o ano de 1980, ano que define as condições iniciais das populações consideradas.

A indefinição em  $r_M$  não prejudica a modelagem da população quando  $P_0 \rightarrow P_M$ , pois  $\beta(P, P_M) \rightarrow 0$  para qualquer  $r_M$  resulta em uma estabilização do desenvolvimento demográfico.

### **Considerações Finais**

Como já era esperado, observando os parâmetros estatísticos de ajustes  $X^2$  e  $R_a^2$  das Tabelas 3 e 4 verificamos que de fato o MCL apresenta os melhores ajustes em cada uma das UTs analisadas.

A população de MG apresentou o menor coeficiente de dispersão  $X^2$  tanto para o MCN quanto para o MCL. Esta baixa dispersão pode refletir que, neste período, o crescimento da população de MG foi pouco afetado por cenários políticos ou econômicos.

O paralelo entre o MCN e MCL aplicado ao município de Capelinha merece destaque. Neste município as interpretações dos resultados dos modelos levaram a interpretações distintas. A previsão do futuro populacional de Capelinha também é distinta: o MCN sugere um crescimento continuado, já o MCL sugere que a população se encontra em um processo de estabilização.

A população de Teófilo Otoni apresentou a menor qualidade de ajustes entre as UTs para os dois modelos considerados. O MCN não é capaz de prever a estabilização populacional. Já o MCL é capaz de prever uma estabilização populacional, mas não prevê as oscilações no crescimento da população. Tais oscilações podem ser reflexos das características urbanas e suscetíveis de sua economia.

Observamos que as populações das três unidades territoriais apresentam comportamentos distintos frente ao MCL. Estas distinções são compreendidas ou justificadas pelas respectivas características geográficas, políticas e econômicas.

**Abstract:** Among the population study, those involving mathematical models are the most used by the academic community. This work computationally implements two mathematical models and presents the results to discuss the dynamics of population growth in the studied cities, compared to the state of Minas Gerais and the socio-economic scenario of its territorial units. The models are the Natural Growth Model (NGM) and the Logistic Growth Model (LGM) and are applied to the population of the state of Minas Gerais (MG) and the cities of Capelinha and Teófilo Otoni. It is considered the socio-economic characteristics of each of these territorial units (UTs). Estimating the values of the parameters contained in NGM and LGM to represent the population of each of the UTs mentioned, as well as the statistical parameters  $X^2$  and  $R_a^2$  which indicate the quality of each adjustment made.

**Key-words:** Mathematics models. Logistic growth. Population.

## Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2006. 389p.

BOYCE W. E.; DIPRIMA R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 434p.

MAROCO, J. **Análise Estatística – Com utilização do SPSS**. 3. ed. Lisboa (Portugal): Ed. Silabo, 2007. 824p.

MOREIRA J. C.; EUSTÁQUIO, S. **Geografia Geral e do Brasil: espaço geográfico e globalização**, São Paulo: Scipione, 2005. 431p.

SILVA, J. M. **Modelos para a Dinâmica de Vegetação em Áreas Alagáveis Amazônicas**. 2011. 133p. Tese de Doutorado – LNCC. Petrópolis.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 535p.

ZAR J. H. **Biostatistical Analysis**. 4. ed. Upper Saddle River (New Jersey): Prentice Hall, 1999. 663p.

CANAL do Tempo. Disponível em: “<http://br.weather.com/weather/local>”. Acesso em: 04 jun. 2012

GOVERNO de Minas. **Secretaria de Estado de Desenvolvimento Econômico**. Disponível em: <http://www.desenvolvimento.mg.gov.br/pt/minas-em-numeros/produtointerno-bruto-de-minas-gerais>. Acesso em: 04 jun. 2012.

INSTITUTO Brasileiro de Geografia e Estatística, IBGE. Disponível em: “[www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br)”. Acesso em: 04 abr. 2011.

PREFEITURA de Capelinha. **Conheça Capelinha**. Disponível em: “<http://www.diariodojequi.com.br>”. Acesso em: 03 out. 2011.

TECNOLOGIA da Informação a serviço do SUS, **DATASUS**. Disponível em: “<http://www2.datasus.gov.br>”. Acesso em: 03 out. 2011.